

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ενδεικτικές απαντήσεις**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

**Απάντηση:**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  (1).

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

- Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 5**

**Απάντηση:**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ .

**A3.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**Απάντηση:**

**Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα** της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζουμε κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει:  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι "1-1", αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- β) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- γ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- δ) Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

- ε) Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και ισχύει

$$(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

**Μονάδες 10**

**Απάντηση:**

<b>α</b>	<b>β</b>	<b>γ</b>	<b>δ</b>	<b>ε</b>
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2\ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 8**

**Απάντηση:**

Είναι  $h = f \circ g$  άρα

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) : \sqrt{x-2} + 1 > 1\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) : \sqrt{x-2} > 0\} \\ &= (2, +\infty) \end{aligned}$$

και

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln\sqrt{x-2} = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2), x > 2.$$

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $h(x) = \ln(x-2), x \in (2, +\infty)$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h^{-1}$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**Απάντηση:**

Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(2, +\infty)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με  $h'(x) = \frac{(x-2)'}{x-2} = \frac{1}{x-2} > 0$  για κάθε  $x \in (2, +\infty)$ , οπότε  $h$  γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$

άρα και 1-1. Συνεπώς αντιστρέφεται και ισχύει ότι

$$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

διότι  $h$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$  και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

Τέλος, για την εύρεση του τύπου της αντίστροφης, θέτουμε

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Συνεπώς,  $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$ .

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ .

Μονάδες 8

**Απάντηση:**

Παρατηρούμε ότι  $L = \lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ . Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty \text{ από B2.}$$

Επομένως,  $L = -\infty$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .
- Η ευθεία  $y = x$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στην αρχή των αξόνων,

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

- $\kappa = 0$  και
- $\mu = 1$ .

Μονάδες 8

**Απάντηση:**

i) Εφόσον η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε για  $k \neq 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx) = \begin{cases} -\infty, k < 0 \\ +\infty, k > 0 \end{cases}$$

απορρίπτονται και οι δυο περιπτώσεις. Άρα  $k=0$ .

ii) Για  $k=0$  έχουμε:  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ , η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως ρητή.

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - \mu x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

Η ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y=x$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $O(0,0)$  άρα  $f'(0) = \lambda_\epsilon = 1$ .

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{(1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1.$$

**Γ2. i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (μονάδες 3) και να βρείτε

το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ , για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 11**

**Απάντηση:**

i) Από το Γ1. έχουμε:  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ , η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως ρητή.

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 > 0}{-x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$
- $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 > 0}{1 - x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 > 0}{1 - x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα για  $x \in [-1, 1]$ ,

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα για  $x \in (-\infty, -1]$  και  $x \in [1, +\infty)$ .

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για  $x = -1$  το  $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για  $x = 1$  το  $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω τα διαστήματα  $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ ,  $\Delta_2 = [-1, 1]$  και  $\Delta_3 = (1, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

Στο  $\Delta_1$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:  $f(\Delta_1) = (f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (-\frac{1}{2}, 0)$ .

Στο  $\Delta_2$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:  $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Στο  $\Delta_3$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:  $f(\Delta_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)) = (0, \frac{1}{2})$ .

$$\text{Τελικά: } f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν  $\alpha \neq 0$  ισχύει:  $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$ , άρα  $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(D_f)$  οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι αδύνατη.

- Αν  $\alpha = 0$  τότε:  $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2}$  άρα η αρχική εξίσωση γίνεται:  $f(x) = \frac{1}{2}$ ,

και έχουμε μοναδική λύση την  $x=1$  αφού  $\frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\Delta_2$ .

Γ3. Για  $v \in \mathbb{N}$  ορίζουμε  $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2 + 1} dx$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ .

ii) Να υπολογίσετε τα  $I_0$ ,  $I_1$  και  $I_2$ .

**Απάντηση:**

i. Για  $v \in \mathbb{N}$  είναι:

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 x^{2v+1} \frac{1+x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[ \frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\text{ii. } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

Από την αναδρομική σχέση του προηγούμενου ερωτήματος:  $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , για  $v=0$  προκύπτει:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

Αντίστοιχα, θέτοντας  $v=1$  στην αναδρομική σχέση, προκύπτει:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$$

#### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $g'(x) \neq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (-1, 0)$  ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0$$

**Μονάδες 6**

**Απάντηση:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = g(x) + x$ ,  $x \in [x_1, 0]$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επίσης:

- $h(0) = g(0) > 0$  διότι  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$  διότι  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οπότε  $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow g(-1) - 1 < 0$ .

Ισχύει δηλαδή ότι  $h(0) \cdot h(-1) < 0$ .

Οπότε, προκύπτει από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε  $h(x_1) = 0$ .

Έχουμε όμως ότι  $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επειδή η  $h'$  είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Συνεπώς, η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  άρα και στο διάστημα  $(-1, 0)$  οπότε,  $x_1$  μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $h(x) = 0$ .

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - kx, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με  $k \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $k = 3$

**Μονάδες 2**

**Απάντηση:**

Εφόσον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο  $x_0 = 0$ .

Άρα πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

Έχουμε :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - k \right) = 3 - k$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x \cdot (g(x) + x)] = 0$$

διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$  αφού  $g$  συνεχής.

Επομένως,  $3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύουν:

i)  $f(x) \geq 0$  και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση  $3f(x) = \pi$  έχει ακριβώς μία ρίζα,  $x_2$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Απάντηση:**

i) Για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ .

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \text{ για}$$

κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  οπότε, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Έτσι, για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε  $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$ .

ii) Έχουμε την εξίσωση  $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  οπότε η εικόνα του

$$\text{διαστήματος } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2 - \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty.$$

Παρατηρούμε ότι  $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$  άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ώστε  $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ . Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  το  $x_2$  είναι

μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = \frac{\pi}{3}$ .

**Δ4. i)** Να αποδείξετε  $f(x) \geq 0$  στο διάστημα  $[x_1, 0]$ . (μονάδες 3)

ii) Έστω  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x_1 = x$  και  $x = f(x_2)$ , όπου  $x_1$  είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και  $x_2$  είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας  $y'y$  χωρίζει το  $\Omega$  σε δύο ισομεταβλητικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

(μονάδες 7)

**Μονάδες 10**

i) Θα βρούμε τη μονοτονία της  $h$ .

1ος τρόπος

Ισχύει ότι  $h'(x) = g'(x) + 1$  που από το ερώτημα Δ1 διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[x_1, 0]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, 0)$  οπότε από το θεώρημα μέσης

τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, 0)$  τέτοιο ώστε  $h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{-x_1} = \frac{g(0)}{-x_1} > 0$  αφού

$g(0) > 0$  και  $x_1 < 0$ .

Συνεπώς,  $h'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

2ος τρόπος

Στο ερώτημα Δ1 αποδείξαμε ότι η  $h$  είναι γνησίως μονότονη με  $h(0) > 0$  και  $h(-1) < 0$ .

Άρα  $-1 < 0 \Rightarrow h(-1) < h(0)$  συνεπώς η  $h$  δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [x_1, 0]$ .

Για κάθε  $x \in [x_1, 0]$  έχουμε  $x_1 \leq x \leq 0 \overset{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x_1) \leq h(x) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$ . Επίσης  $x^2 \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$  οπότε  $x^2 \cdot h(x) = f(x) \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$ .

ii) Το εμβαδό του χωρίου  $\Omega_1$  που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και

$$\text{την ευθεία } x = x_1 \text{ είναι } E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx \overset{f(x) \geq 0}{\Leftrightarrow} E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx$$

Το εμβαδό του χωρίου  $\Omega_2$  που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και

$$\text{την ευθεία } x = f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ είναι } E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \overset{f(x) \geq 0}{\Leftrightarrow} E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) dx$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 E(\Omega_1) &= \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^0 (x^2g(x) + x^3)dx = \int_{x_1}^0 x^2g(x)dx + \int_{x_1}^0 x^3dx = \\
 &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3}g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} \\
 &= -\frac{x_1^3}{3}g(x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3}g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = -\frac{x_1^3}{3}(-x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3}g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \\
 &= \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3}g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3g'(x)dx
 \end{aligned}$$

Διότι  $g(x_1) = -x_1$  από το ερώτημα Δ1.

$$\begin{aligned}
 E(\Omega_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\
 &= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3\frac{\pi^2}{18} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

Επομένως :

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3g'(x)dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3g'(x)dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^0 x^3g'(x)dx = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \int_{x_1}^0 x^3g'(x)dx.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ  
ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ