ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

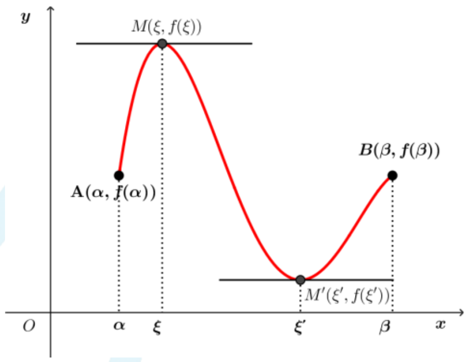
$$\lim_{x\to \alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι :

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- με $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x΄x.



Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_g=\mathbb{R}$ και $D_h=(0,+\infty)$, οπότε για το πεδίο ορισμού της $f=g\circ h$ ισχύει ότι

$$D_f=\{x\in D_h : h(x)\in\mathbb{R}\}=\{x>0 : \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$$

Επιπλέον, για $x\in D_f$, $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-x^2}{x}$.

Β2.

i) Η $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}=\dfrac{4}{x}-\dfrac{x^2}{x}=\dfrac{4}{x}-x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-1<0$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Παρατηρούμε ότι $e<\pi \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(e)>f(\pi)\Rightarrow \dfrac{4-e^2}{e}>\dfrac{4-\pi^2}{\pi}\Rightarrow \dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ και η φορά άλλαξε διότι διαιρέσαμε με $4-e^2<0$.

Β3. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{4}{x}-x\right)=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4}{x}=+\infty$. Επομένως, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)=-1$$

και
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}-x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Για x κοντά στο ∞ ισχύει ότι:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right|=\frac{\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|}\Rightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Ωστόσο, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}-x\right)=-\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο ολοκλήρωμα $\int_2^3 xf(x)dx=1$ για κάθε $x\in[2,3]$ η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\frac{1}{x}+\alpha$

Επομένως έχουμε

$$\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3(1+\alpha x)dx=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow3+\frac{9\alpha}{2}-\left(2+\frac{4\alpha}{2}\right)=1\Leftrightarrow3+\frac{9\alpha}{2}-2-\frac{4\alpha}{2}=1\Leftrightarrow\frac{5\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\boxed{\alpha=0}$$

Γ2. **i.** Για α=0 η συνάρτηση έχει τύπο

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x<1\\ \frac{1}{x}, & x\ge1\end{cases}$$

Έχουμε $f(1)=1$ οπότε

- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x^2-3x+2)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{1}=2\cdot1-3=-1$

- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1}=\dfrac{-\frac{1}{1^2}}{1}=-1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με παράγωγο $f'(1)=-1$ επομένως ορίζεται η εφαπτόμενη.

ii. Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow \boxed{y=-x+2}$

Επειδή $f'(1)=-1$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης είναι

$\lambda=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1$ και $\omega\in[0,\pi)$ έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4}$ άρα $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$

Γ3. Για $x<1$ είναι $f(x)=x^2-3x+3$ και $f'(x)=(x^2-3x+3)'=2x-3$

όμως $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1$ άρα $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,1)$ επομένως είναι και ¨1–1¨στο διάστημα αυτό

Ακόμα

- για κάθε $x\in(-\infty,1)$ το πεδίο τιμών είναι $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2-3x+3)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$

Επομένως $f(A_1)=(1,+\infty)$

Για $x\ge1$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1,+\infty)$ επομένως είναι και ¨1–1¨στο διάστημα αυτό

Ακόμα

- για κάθε $x \in [1,+\infty)$ το πεδίο τιμών είναι $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $f(1) = 1$ Επομένως $f(A_2) = (0,1]$

Επειδή $f(A_1) \cap f(A_2) = \varnothing$ δεν υπάρχουν $x_1 \in (-\infty,1)$ και $x_2 \in [1,+\infty)$ τέτοια, ώστε

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι ¨1–1¨ στο πεδίο ορισμού της

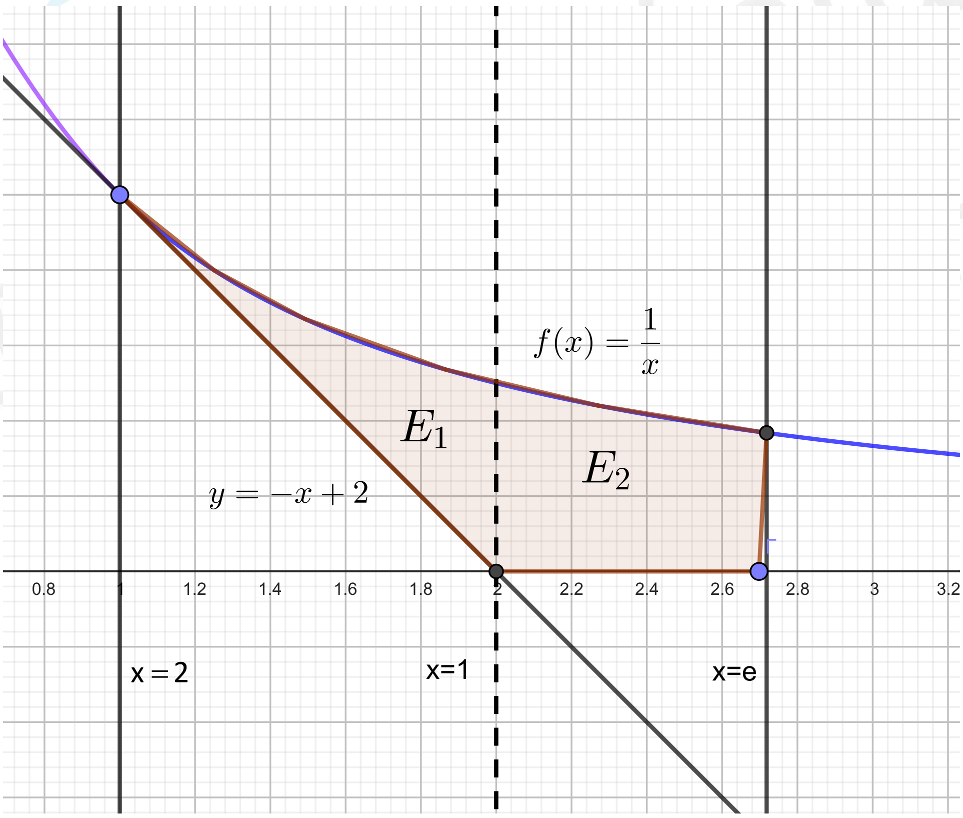
Το σύνολο τιμών της είναι $f(A_1) \cup f(A_2) = (1,+\infty) \cup (0,1] = (0,+\infty)$

Γ4. Για $x \geq 1$ είναι $f(x) = \frac{1}{x}$ και η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $y = -x+2$.

Επίσης $f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ οπότε η f είναι κυρτή επομένως

$f(x) \geq -x+2$

Η γραφική παράσταση είναι



Από τη γραφική παράσταση το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=E_1+E_2=\int_1^2\left[f(x)-(-x+2)\right]dx+\int_2^e f(x)dx=$$

$$=\int_1^2\left[\frac{1}{x}+x-2\right]dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln x\right]_2^e=$$

$$=\ln 2+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2-\left(\ln 1+\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right)+\ln e-\ln 2=$$

$$=\ln 2+2-4-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)+1-\ln 2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0 \text{ και } \lim_{x\to 1}\left[f(x)-2x\right]=f(1)-2.$$

Υποθέτουμε ότι $f(1)-2\neq 0$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}$ είτε θα είναι $+\infty$ είτε θα είναι $-\infty$ είτε δεν υπάρχει που είναι άτοπο.

Άρα, $f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=2\Leftrightarrow \ln 1-1+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa=3$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2-x}=\frac{2-x-x^2}{x^2(2-x)}=\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)},\ x\in(0,2).$$

Ισχύει ότι $x^2(2-x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$ οπότε οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτώνται από το

$$-x^2-x+2.$$

Είναι $\Delta=9$ και $\rho_{1,2}=\frac{1\pm 3}{-2}\begin{cases}-2 \text{ απορρίπτεται.}\\ 1\end{cases}$

x	0	1	2
$f'(x)$	+		−
f	↗		↘

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ οπότε

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2].$$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)+3\right]=\ln 2+3 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty .$$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=(1,2)$ οπότε

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),f(1)\right)=(-\infty,2).$$

Είναι $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)\right]\overset{u=2-x}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim_{u\to 0^+}[\ln u]=-\infty \text{ και } \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x}+3\right)=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $0\in f(\Delta_1)$, $0\in f(\Delta_2)$ και η f είναι 1-1 σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1\in\Delta_1\,(0<x_1\le 1)$ και ακριβώς μία ρίζα $x_2\in\Delta_2\,(1<x_2<2)$.

Επιπλέον, $f(1)=2\ne 0$ οπότε $0<x_1<1$. Έτσι λοιπόν $0<x_1<1<x_2<2$.

Τέλος, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_3=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ οπότε

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\overset{f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{5}{3}>0}{=}\left(-\infty,\ln\frac{5}{3}\right).$$

Παρατηρούμε ότι $0\in f(\Delta_3)$ και η f είναι 1-1 στο διάστημα Δ_3 οπότε $x_1\in\Delta_3$ δηλαδή $x_1<\frac{1}{3}$.

Δ3. • Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$.

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}\overset{f(x_1)=0}{=}\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Επιπλέον, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^3}<0 \text{ για κάθε } x\in(0,2).$$

Άρα, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$ οπότε και 1-1.

Έτσι λοιπόν υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. **i)** Αφού F, G είναι δύο αρχικές της f στο διάστημα $(0,2)$ έχουμε ότι

$$F(x)=G(x)+c \text{ για κάθε } x\in(0,2) \ \textbf{(1)}.$$

• Για $x=x_1$ στη σχέση **(1)** έχουμε $F(x_1)=G(x_1)+c\overset{F(x_1)=0}{\Leftrightarrow}0=G(x_1)+c\Leftrightarrow G(x_1)=-c$.

• Για $x=x_2$ στη σχέση **(1)** έχουμε $F(x_2)=G(x_2)+c\overset{G(x_2)=0}{\Leftrightarrow}F(x_2)=c$.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$F(x_2)+G(x_1)=c-c=0.$$

ii) Αφού G αρχική της f στο διάστημα $(0,2)$ ισχύει ότι

$$G'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in(0,2).$$

Άρα $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Όμως

Αν $x_1 < x \leq 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq 2$

Αν $1 < x < x_2 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow 2 > f(x) > 0$.

Άρα $G'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ δηλαδή η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Στο διάστημα (x_1, x_2) η εξίσωση

$$x_1F(x) + x_2G(x) = x_1 + x_2 - 2x \Leftrightarrow x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x \text{ με } D_H = (0,2).$$

- Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $H(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 \overset{F(x_1)=0}{=} x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$

  αφού, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow G(x_1) < G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1) < 0 \Leftrightarrow x_2G(x_1) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$.

$H(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 \underset{F(x_2)=-G(x_1)}{\overset{G(x_2)=0}{=}} -x_1G(x_1) + x_2 - x_1 > 0$

αφού, $G(x_1) < 0 \Leftrightarrow -x_1G(x_1) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$.

Δηλαδή, $H(x_1)H(x_2) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $H(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Επιπλέον, $H'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Άρα, η H είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (x_1, x_2), δηλαδή 1-1 οπότε η εξίσωση

$$H(x) = 0 \Leftrightarrow x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).