ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με $cf'(x)$.

Μονάδες 10

Απάντηση:

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$ έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right].$$

Για $h\neq 0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c\cdot f'(x).$$

Άρα $\left[cf(x)\right]'=cf'(x).$

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i=1,2,\ldots,\kappa$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

β. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x).$$

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\overline{x}-s,\overline{x}+s\right)$.

δ. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x>0$

ε. Η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

Απάντηση:

α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+\alpha x^2-12x+10$, όπου $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(2x^3+\alpha x^2-12x+10\right)'=6x^2+2\alpha x-12,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το α.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχουμε ότι

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

B3. Για $\alpha = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

Απάντηση:

Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,\ x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0$ οπότε οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι αριθμοί $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$	
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f

- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = -16 + 12 + 24 + 10 = 30$.
- παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $x_2 = 1$ με τιμή $f(1) = 2 + 3 - 12 + 10 = 3$.

B4. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{x - 1}$.

Μονάδες 6

Απάντηση:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2+x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{6(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[6(x+2)\right]=18.$$

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$		ν_3	
$[20,24)$		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ό μέσος χρόνος είναι $\bar{x}=14$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\nu_3=10$.

Μονάδες 8

Απάντηση:

Από τον τύπο $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i$ έχουμε

$$\bar{x}=\frac{10\cdot20+14\cdot25+18\nu_3+22\cdot5}{\nu}\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{200+210+18\nu_3+22\cdot5}{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{410 + 18v_3 + 110}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{520 + 18v_3}{20 + 15 + v_3 + 5} = 14$$

$$\Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \Leftrightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520$$

$$\Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow \boxed{v_3 = 10}$$

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	$v_3 = 10$	180
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	$v = 50$	700

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Από τον τύπο

$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$ έχουμε

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot v_4}{v}$$

$$= \frac{(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5}{50}$$

$$= \frac{(-4)^2 \cdot 20 + (0)^2 \cdot 15 + (4)^2 \cdot 10 + (8)^2 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 0 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

Άρα $\boxed{s^2 = 16}$

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Από το **Γ3** έχουμε $s^2 = 16$ οπότε $s = \sqrt{16} = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής CV είναι

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$ αφού $\frac{2}{7} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2 \cdot 10 > 1 \cdot 7$ που ισχύει

Επομένως το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ με $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Απάντηση:

Είναι $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{(-1)' x^2 - (-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
f	↘	‖	↗

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4,-1]$ ισχύει:

$$-1 \le f(x) \le -\frac{1}{16}$$

Μονάδες 6

Απάντηση:

Στο διάστημα $[-4,-1]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε $x \in [-4,-1]$ έχουμε

$$-4 \le x \le -1 \Leftrightarrow f(-4) \ge f(x) \ge f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \ge f(x) \ge -\frac{1}{(-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{16} \ge f(x) \ge -1 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le -\frac{1}{16}.$$

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης f στο σημείο $M(1,f(1))$.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Είναι $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$ και $f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$.

Ας είναι $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(1,f(1))$.

Ισχύει ότι $\alpha = f'(1) = 2$.

Οπότε $\varepsilon: y = 2x + \beta$.

Όμως $M \in \varepsilon \Leftrightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + \beta \overset{f(1)=-1}{\Leftrightarrow} -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$.

Τελικά, $\varepsilon: y = 2x - 3$.

Δ4. Αν $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), \Gamma(x_3,y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Αφού τα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y=2x-3$ έχουμε

$y_1=2x_1-3$, $y_2=2x_2-3$, $y_3=2x_3-3$.

Ας είναι $z_1=2x_1$, $z_2=2x_2$, $z_3=2x_3$.

Ισχύει ότι $\bar{z}=2\cdot\bar{x}=2\cdot 4=8$ και $s_z=|2|s_x=2\cdot 2=4$.

Οπότε, $y_1=z_1-3$, $y_2=z_2-3$, $y_3=z_3-3$.

Έτσι λοιπόν, $\bar{y}=\bar{z}-3=8-3=5$ και $s_y=s_z=4$.

Τελικά, ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων y_1, y_2, y_3 είναι

$$CV=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{4}{5}=0{,}8=80\%.$$